

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЛГПУ»)

Институт физико-математического образования, информационных и
обслуживающих технологий
Кафедра высшей математики и методики преподавания математики

УТВЕРЖДАЮ

Врио директора Института физико-
математического образования,
информационных и обслуживающих
технологий

Е.А. Журавлева

« 15 » 20 25 г.

Приложение к рабочей программе учебной дисциплины

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации
обучающихся по дисциплине
Векторный и тензорный анализ

По направлению подготовки – 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя
профилями подготовки)

Профиль подготовки – Физика. Информатика

Квалификация выпускника – бакалавр

Форма обучения – очная

Курс – 2 курс (3 семестр)

Разработчик

Ст. преподаватель кафедры ВМ и МПМ,
Сухотинова Анна Сергеевна

Заведующий кафедрой
высшей математики и методики
преподавания математики

Кривко Я.П.

Протокол «13» 01 2025 г. № 7

Луганск, 2025

1. ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

1.1. Область применения

Фонд оценочных средств (ФОС) – неотъемлемая часть рабочей программы дисциплины и предназначен для контроля и оценки образовательных достижений студентов, освоивших программу дисциплины.

1.2. Цели и задачи фонда оценочных средств.

Рабочая программа учебной дисциплины разработана в соответствии с ФГОС ВО – бакалавриат по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), утвержденным приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 22.02.2018 г. № 125 (с изменениями и дополнениями) и Профессиональным стандартом, утвержденным Приказом Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации «Об утверждении профессионального стандарта Педагог (педагогическая деятельность в сфере дошкольного, начального общего, основного общего, среднего общего образования) (воспитатель, учитель)» от 18 октября 2013 г. № 544н (с изменениями и дополнениями); «Об утверждении профессионального стандарта «Педагог дополнительного образования детей и взрослых» от 22 сентября 2021 г. № 652н., соответствующих профессиональной деятельности выпускников.

1.3. Перечень компетенций, формируемых в процессе освоения основной образовательной программы

Процесс освоения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций и индикаторов их достижения:

Код по ФГОС ВО	Индикатор достижения
Профессиональные	
ПК-1. Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач.	ПК-1.1. Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета). ПК-1.2. Умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ВО. ПК-1.3. Демонстрирует умение разрабатывать различные формы учебных занятий, применять методы, приемы и технологии обучения, в том числе информационные.

1.4. Этапы формирования компетенций и средства оценивания уровня их сформированности

Этапы формирования компетенций	Компетенции	Контрольно-оценочные средства / способ оценивания
Тема 1. Обзор основных сведений из векторной алгебры. Основные понятия и определения: вектор; нулевой вектор; равные вектора; свободный, скользящий и связанный вектор. Основные действия над векторами и их свойства Проекция вектора на ось. Линейная зависимость векторов.	ПК-1	Устный опрос, письменные задания
Тема 2. Векторный базис. Ковариантные и контравариантные компоненты вектора. Понятие векторного базиса. Разложение вектора. Векторный базис в декартовой и криволинейной системах координат. Прямое и обратное преобразования векторов с общим началом. Запись в индексной форме. Взаимные векторные базисы. Ковариантные и контравариантные координаты вектор, индексные обозначения. Их связь. Правило суммирования по индексам. Физические координаты вектора.	ПК-1	Выполнение практических заданий, письменные задания
Тема 3. Вектор-функция. Дифференцирование, интегрирование вектор-функции. Понятие вектор-функции. Годограф вектор-функции. Производная вектор-функции, правила дифференцирования. Интегрирование вектор-функции.	ПК-1	Выполнение практических заданий
Тема 4. Тензор. Преобразование координат тензора. Понятие тензора. Ранг тензора. Свойство инвариантности. Скаляр как тензор нулевого ранга. Вектор как тензор первого ранга. Преобразование компонент вектора. Тензор третьего ранга (тензор напряжений, тензор деформаций, тензор моментов инерции, тензор скоростей деформаций). Определение тензора произвольного порядка. Преобразование компонент тензора при повороте плоскости вокруг перпендикулярной оси. Тензорное уравнение. Инвариантность тензорного уравнения. Тензор в обобщенных координатах. Криволинейные координаты. Тензоры в криволинейных системах координат.	ПК-1	Выполнение практических заданий, письменных заданий
Тема 5. Действия над тензорами.	ПК-1	устный опрос, письменные задания

Сложение, умножение, свертывание тензоров. Поднятие/опускание индексов. Подстановка индексов. Симметричный, антисимметричный тензор. Симметрирование, альтернирование тензоров. Метрический тензор. Понятие главной оси тензора. Приведение тензора к главным осям.		
Тема 6. Основы векторного и тензорного анализа. Понятие тензорной функции скалярного аргумента. Дифференцирование тензор-функции. Понятие тензорного поля, примеры тензорных полей. Понятие циркуляции векторного поля. Скалярное поле. Производная по направлению, градиент скалярного поля. Векторное поле. Векторные линии, примеры. Дифференциальное уравнение векторной линии. Поток векторного поля. Дивергенция векторного поля. Виды векторных полей. Дифференцирование векторного поля по направлению.	ПК-1	Устный опрос Выполнение практических заданий Выполнение индивидуального задания
Промежуточная аттестация	ПК-1	Зачет (письменный)

1.5. Описание показателей формирования компетенций

Код компетенции	Планируемые результаты обучения (показатели)
ПК-1	<p>знать: представление вектора в ко- и контравариантной форме и связь между ко- и контравариантными компонентами вектора; понятие вектор-функции и ее годографа; понятия тензора, ранга тензора; понятие метрического тензора; основные понятия тензорной алгебры (сложение, умножение, свертывание тензоров, симметрирование, альтернирование и др.); понятие тензорной функции, тензорного поля; основные теоремы векторного и тензорного анализа.</p> <p>уметь: проводить операции над векторами, вектор-функциями (дифференцирование, интегрирование); преобразовать компоненты тензора при повороте плоскости вокруг перпендикулярной оси; преобразовать компоненты тензора при переходе к криволинейным координатам; производить основные действия над векторами и тензорами; производить основные действия над тензорными полями; применять аппарат векторного и тензорного исчисления для решения физических и механических задач.</p> <p>владеть навыками: оперирования тензорами; вычисления основных показателей тензорного поля и их физической интерпретацией; аппаратом векторного и тензорного исчисления.</p>

1.6. Критерии оценивания компетенций на разных этапах их формирования

Система оценивания учебных достижений студентов очной формы обучения

Вид текущей учебной работы	Количество баллов (в процентах)
7 семестр	
Самостоятельное изучение материала.	10
Выполнение домашнего задания. Решение задач	20
Самостоятельная работа	10
Выполнение индивидуального задания (реферат)	20
Зачет	40
Итого за семестр:	100

Накопительная система оценивания по 100-балльной шкале

Четырехбалльная система оценивания экзамена	100-балльная шкала	Буквенная шкала, соответствующая 100-балльной шкале	Система оценивания зачета
Отлично	90–100	А – отлично – теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы; все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимальному	Зачтено
Хорошо	83–89	В – очень хорошо – теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы; все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество выполнения большинства из них оценено числом баллов, близким к максимальному	
Хорошо	75–82	С – хорошо – теоретическое содержание курса освоено полностью; некоторые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы недостаточно; все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество выполнения ни одного из них не оценено минимальным числом баллов, некоторые виды заданий выполнены с ошибками	
Удовлетворительно	63–74	Д – удовлетворительно – теоретическое содержание дисциплины освоено частично, но пробелы не носят существенного характера; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном	

		сформированы; большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий, содержат ошибки	
Удовлетворительно	50–62	Е – посредственно – теоретическое содержание курса освоено частично; некоторые практические навыки работы не сформированы, многие предусмотренные программой обучения учебные задания не выполнены либо качество выполнения некоторых из них оценено числом баллов, близким к минимальному	
Неудовлетворительно	21–49	FX – неудовлетворительно – теоретическое содержание курса освоено частично; необходимые практические навыки работы не сформированы; большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий не выполнено либо качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимальному; при дополнительной самостоятельной работе над материалом курса возможно повышение качества выполнения учебных заданий	Не зачтено
Неудовлетворительно	0–20	F – неудовлетворительно – теоретическое содержание курса не освоено; необходимые практические навыки работы не сформированы; все выполненные учебные задания содержат грубые ошибки, дополнительная самостоятельная работа над материалом курса не приведет к какому-либо значимому повышению качества выполнения учебных заданий	

2. КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА

2.1. Оценочные средства текущего контроля (типовые)

Темы рефератов

Реферат - это самостоятельная научно-исследовательская работа студента, где автор раскрывает суть исследуемой проблемы; приводит различные точки зрения, а также собственные взгляды на нее. Содержание материала должно быть логичным, изложение материала носит проблемно-поисковый характер. Следует отметить, что самостоятельный выбор студентом темы реферата или направления исследования только приветствуется. Прежде чем выбрать тему реферата, автору необходимо выяснить свой интерес, определить, над какой проблемой он хотел бы поработать, более глубоко ее изучить и получить консультацию преподавателя.

Примеры предлагаемых тем:

1. Сложение векторов в аффинном пространстве. Коммутативность и ассоциативность сложения. Нулевой вектор, противоположный вектор.
2. Умножение вектора на число в аффинном пространстве. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов.

3. Базис в аффинном пространстве. Разложение вектора по базису, координаты вектора. Координаты точки.
4. Преобразование аффинного репера, преобразование координат вектора.
5. Линейные и билинейные формы на векторах, аффиннор. Тензоры первого и второго ранга.
6. Общее определение тензора произвольной структуры в аффинном пространстве.
7. Сложение тензоров, подстановка индексов.
8. Умножение тензоров, свертка тензоров.
9. Тензорные поля и дифференцирование тензоров в аффинном пространстве.
10. Введение криволинейных координат в аффинном пространстве. Взаимная обратимость преобразований. Локальный базис. Операция с тензорами в локальном базисе.
11. Параллельный перенос вектора в аффинном пространстве. Коэффициенты аффинной связности.
12. Преобразование коэффициентов аффинной связности в аффинном пространстве.
13. Элементарное многообразие. Многообразие.
14. Тензоры в многообразии.
15. Касательное аффинное пространство.
16. Пространства аффинной связности.
17. Параллельный перенос одноковариантного тензора в пространствах аффинной связности.
18. Параллельный перенос тензоров произвольной структуры в пространствах аффинной связности.
19. Геодезические в пространствах аффинной связности.
20. Абсолютный дифференциал тензора произвольной структуры в пространствах аффинной связности.
21. Ковариантная производная тензора произвольной структуры в пространствах аффинной связности.
22. Тензор кривизны (тензор Римана-Кристоффеля) в пространствах аффинной связности. Тензор Риччи.
23. Введение метрики в евклидовом пространстве.
24. Фундаментальный (метрический) тензор в пространствах аффинной связности. Общее определение, симметрия, ковариантные свойства.
25. Метрика, согласованная со связностью. Связь коэффициентов связности с метрическим тензором.

Самоконтроль студентов состоит в проработке лекционного материала, работе с учебниками, подготовке к практическим занятиям, экзамену. Для студентов ниже предоставлен перечень вопросов и задач для подготовки к зачету.

Перечень вопросов и задач, выносимых на письменный зачет

1. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(3, 2, 1)$ в направлении наискорейшего роста функции $\exp(-r^2)$, $r=|r|$.
2. Написать уравнение плоскости, касательной к поверхности постоянного значения функции (x^2+y^2-3z) в точке $A(-1, 2, -1)$.
3. Найти угол между направлениями наискорейшего роста функций $(x^2+2y^2-z^2)$ и $r=|r|$ в точке $A(-1, 1, 1)$.
4. Найти силу, действующую на частицу в точке $A(-1, -2, -1)$, если потенциальная энергия равна $(2x+y^2-z)$.
5. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах:
 $-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

6. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1, 1, 2)$, которая является плоскостью, касательной к поверхности постоянного значения функции $|\vec{r} - \vec{a}|$ в этой точке. \vec{r} - радиус-вектор, \vec{a} - постоянный вектор с координатами $(1, 2, 0)$.

7. Для тетраэдра, заданного координатами вершин, уметь находить: длины ребер, углы между ребрами, площади граней, углы между гранями, объем.

8. Найти: $\text{grad } r$, $\text{div } \vec{r}$, $\text{rot } \vec{r}$, $\text{grad } \rho$, $\text{div } \vec{\rho}$, $\text{rot } \vec{\rho}$, где $\vec{r}(x, y, z)$, $r = |\vec{r}|$, $\vec{\rho}(x, y, 0)$, $\rho = |\vec{\rho}|$.

9. Найти $\text{grad } x$, $\text{div } z\vec{r}$, $\text{rot } y\vec{r}$

10. Вычислить: $\text{grad } \frac{e^{-cr}}{r}$, $\text{grad sin}(\vec{k}\vec{r})$, $\text{div}[\vec{a}[\vec{b}\vec{r}]]$, $\text{div}[\vec{a}\vec{r}]$, $\text{rot}[\vec{a}\vec{r}]$,

$\text{rot}[\vec{a}[\vec{b}\vec{r}]]$, $\text{rot}(\vec{d} \sin(\vec{k}\vec{r}))$, $\text{div}(\vec{d} \sin(\vec{k}\vec{r}))$, $\Delta(\frac{x}{r^3})$, $\text{div}(r[\vec{a}\vec{r}])$, $\text{rot}(r[\vec{a}\vec{r}])$,

$\text{grad}([\vec{a}\vec{r}], [\vec{b}\vec{r}])$, $\text{div} \frac{[\vec{a}\vec{r}]}{r}$, $\text{rot} \frac{[\vec{a}\vec{r}]}{r}$, $\Delta \frac{x^2}{r}$, $\Delta([\vec{a}\vec{r}], [\vec{b}\vec{r}])$, $\Delta \frac{e^{-cr}}{r}$ где

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}, \vec{k} = \text{const}$, $c = \text{const}$, $c > 0$, $\vec{r}(x, y, z)$, $r = |\vec{r}|$. Результаты записать компактно, по возможности в векторном виде.

11. Вычислить: $\text{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}_0|}$, $\text{div} \frac{\vec{r} - \vec{R}_0}{|\vec{r} - \vec{R}_0|}$, $\text{rot} \frac{\vec{d}}{r}$, $\Delta \frac{y}{r^3}$, $\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}_0|}$, где

$\vec{R}_0, \vec{d} = \text{const}$, $\vec{r}(x, y, z)$, $r = |\vec{r}|$. Результаты записать компактно, по возможности в векторном виде.

12. Вычислить: $\text{grad} \left(\frac{\vec{d}\vec{r}}{r^3} \right)$, $\text{rot} \frac{[\vec{d}\vec{r}]}{r^3}$, $\Delta \left(\frac{z}{r^3} \right)$, где $\vec{d} = \text{const}$, $\vec{r}(x, y, z)$, $r = |\vec{r}|$.

Результаты записать компактно, по возможности в векторном виде.

13. Вычислить: $\text{grad}((\vec{a}\vec{r})(\vec{b}\vec{r}))$, $\text{div} \left(\frac{(\vec{d}\vec{r})\vec{r}}{r^5} \right)$, $\text{rot} \left(\frac{(\vec{d}\vec{r})\vec{r}}{r^5} \right)$, $\Delta(\vec{d} \cos(\vec{k}\vec{r}))$,

где $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}, \vec{k} = \text{const}$, $\vec{r}(x, y, z)$, $r = |\vec{r}|$. Результаты записать компактно по возможности в векторном виде.

14. Найти поток поля $\vec{a}(\vec{r})(x - z, y + 2x - z, x + y)$ через поверхность сферы радиуса r с центром в начале координат.

15. Найти циркуляцию поля $\vec{a}(\vec{r})(x - z, y + 2x - z, x + y)$ по окружности единичного радиуса с центром в начале координат, лежащей в плоскости (y, z) .

16. Найти циркуляцию поля $[\vec{a}\vec{r}]$ по окружности единичного радиуса с центром в начале координат, лежащей в плоскости, нормаль которой образует равные углы с координатными осями ($\vec{a} = \text{const}$, $\vec{r}(x, y, z)$).

17. Вычислить div grad для следующих скалярных полей:

а) $f = \sin(\vec{k}\vec{r})$, б) $f = r^{-1} \sin(\vec{k}\vec{r})$, в) $f = (\vec{k}\vec{r})^2$, г) $f = \exp(-r)$,

д) $f = \exp(-r^2)$, е) $f = r^{-1} \exp(-r)$, где \vec{k} - постоянный вектор.

18. Вычислить rot rot для следующих векторных полей:

а) $\vec{a} = (x^2, xy - y^2, xz + z^2)$, б) $\vec{a} = (x^2 + y^2, xz, yz)$, в) $\vec{a} = (2xz, x^2 + y^2, 2z^2)$

19. Упростить выражения с предварительным использованием методов векторной алгебры и вычислить: а) $\text{rot}[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{r}]]$, б) $\text{div}[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{r}]]$, в) $\text{rot}[[\vec{a}, \vec{r}], [\vec{b}, \vec{r}]]$,

г) $\text{div}[[\vec{a}, \vec{r}], [\vec{b}, \vec{r}]]$, где \vec{a}, \vec{b} - постоянные векторы.

20. Преобразовать выражения методом оператора ∇ и затем расписать в частных производных следующие выражения: а) $\text{div}[\vec{A}, \vec{B}]$, б) $\text{grad}(\vec{A}, \vec{B})$, в) $\text{rot}[\vec{A}, \vec{B}]$, г) $\text{div}(f\vec{A})$, д) $\text{rot}(f\vec{A})$, е) $\text{grad}(f \cdot e)$, ж) $\text{divgrad}(f \cdot e)$

21. Найти напряженность электрического поля, если задан потенциал φ , $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$

а) $\varphi = (x^2 + 2y^2z + \sin(x)) \cdot \exp(-(x^2 + y^2 + z^2))$,

б) $\varphi = (x^2 + \sin(z \cdot x) + y^2x \cdot \cos(z)) \cdot \exp(-x^2)$

22. Найти плотность электрического заряда в вакууме ρ , если задана напряженность электрического поля \vec{E} , $\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho$

а) $\vec{E} = (x^2 + 4\sin(z)\exp(xy), \cos(x) + \ln(xyz), xy^2z)$

б) $\vec{E} = (x \cdot \exp(-x^2) + y + z, \ln(xy)\sin(z), x + y + z + 1)$

23. Зная вид функций $x_i = x_i(q_k)$, записать квадрат расстояния между двумя бесконечно-близкими точками, и найти коэффициенты Ламе для сферической и цилиндрической систем координат.

(Для сферической системе координат: $x_1 = \sin\theta \cos\phi$, $x_2 = \sin\theta \sin\phi$, $x_3 = \cos\theta$. Для цилиндрической системы координат $x_1 = \rho \cos\phi$, $x_2 = \rho \sin\phi$, $x_3 = z$.)

24. Получить формулы для градиента скалярного поля Ψ в сферической и цилиндрической системах координат.

25. Получить формулы для дивергенции векторного поля \vec{a} в сферической и цилиндрической системах координат.

26. Получить формулы для ротора векторного поля \vec{a} в сферической и цилиндрической системах координат.

27. Получить формулы для оператора Лапласа скалярного поля Ψ в сферической и цилиндрической системах координат

28. Задана сферически-симметричная функция: $\Psi(r)$. Найти $\text{grad } \Psi(r)$, $\Delta\Psi(r)$

а) $\Psi(r) = 3r^2$, б) $\Psi(r) = r^3 + 2r^2$, в) $\Psi(r) = \sin(r^2)$

29. Найти матрицу поворота системы координат на плоскости при повороте на угол φ .

а) Убедится, что матрица (U_3) поворота на угол $\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$ совпадает с произведением матриц (U_1) и (U_2) , которые являются матрицами поворота на углы φ_1 и φ_2 соответственно.

б) Убедиться, что матрица поворота (U_2) на угол $-\varphi$ совпадает с матрицей $(U_1)^{-1}$, где (U_1) - матрица поворота на угол φ .

30. Найти матрицу поворота системы координат в трехмерном пространстве на угол ϕ .

а) Вокруг оси Ох. б) Вокруг оси Оу. в) Вокруг оси Oz

31. В случае двумерного пространства вычислить компоненты вектора b_i в системе координат, повернутой на угол ϕ по сравнению с исходной. Компоненты вектора и угол ϕ следующие:

а) $b_1 = 1, b_2 = 2, \phi = \pi/6$. б) $b_1 = 3, b_2 = 1, \phi = \pi/3$.

в) $b_1 = 5, b_2 = 2, \phi = \pi/4$. г) $b_1 = -1, b_2 = 4, \phi = -\pi/6$

32. В случае двумерного пространства вычислить компоненты тензора второго ранга a_{ij} в системе координат, повернутой на угол ϕ по сравнению с исходной. Компоненты тензора и угол ϕ следующие:

а) $a_{11} = 1, a_{12} = 2, a_{21} = -3, a_{22} = 5, \phi = \pi/3$

б) $a_{11} = -1, a_{12} = 4, a_{21} = -2, a_{22} = 1, \phi = \pi/4$

в) $a_{11} = 3, a_{12} = 1, a_{21} = -2, a_{22} = 6, \phi = \pi/6$

г) $a_{11} = 5, a_{12} = 2, a_{21} = 1, a_{22} = 1, \phi = \pi/2$

33. В трехмерном пространстве заданы компоненты вектора. Найти компоненты вектора в системе координат, повернутой на угол ϕ вокруг оси Ох по сравнению с исходной. Компоненты вектора и угол ϕ следующие:

а) $b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = -3, \phi = \pi/3$

б) $b_1 = 4, b_2 = -1, b_3 = 5, \phi = \pi/2$

34. Даны векторы a_i и b_i . Доказать, что множество величин $\{a_i \cdot b_j\}$ образует тензор второго ранга. Такой тензор иногда называют диадой.

35. Даны: вектор a_i и тензор второго ранга b_{ij} . Доказать, что множество величин $\{a_i \cdot b_{jk}\}$ образует тензор третьего ранга.

36. Дан тензор третьего ранга a_{ijk} . Доказать, что множество величин $b_{jik} = a_{ijk}$ образует тензор третьего ранга.

37. Даны тензоры второго ранга a_{ij} и b_{ij} . Доказать, что множество величин $\{a_{ij} \cdot b_{km}\}$ образует тензор четвертого ранга.

38. Найти тензор $c_{ij} = a_{ij} + b_{ji}$, где a_{ij} и b_{ij} являются тензорами в двумерном пространстве и их компоненты равны:

а) $a_{11} = 1, a_{12} = 2, a_{21} = -3, a_{22} = 5, b_{11} = -1, b_{12} = 4, b_{21} = -2, b_{22} = 1$

б) $a_{11} = 3, a_{12} = 1, a_{21} = -2, a_{22} = 6, b_{11} = 5, b_{12} = 2, b_{21} = 1, b_{22} = 1$

в) $a_{11} = 2, a_{12} = 1, a_{21} = -2, a_{22} = 3, b_{11} = 0, b_{12} = 6, b_{21} = 2, b_{22} = 4$

39. В двумерном пространстве заданы векторы a_i и b_i а так же тензоры второго ранга c_{ij} и d_{ij} . Найти тензорную размерность приведенных ниже величин и вычислить все их компоненты:

- а) $a_i b_j$ б) $a_i b_i$ в) $a_i c_{jk}$ г) $b_i d_{jk}$ д) c_{ii}
 е) d_{jj} ж) $a_i c_{ij}$ з) $a_i c_{ji}$ и) $a_i c_{jj}$ к) $b_i d_{ij}$
 л) $b_i d_{ji}$ м) $b_i d_{jj}$ н) $c_{ij} d_{jk}$ о) $c_{ji} d_{jk}$ п) $c_{ii} d_{jj}$

Векторы a_i и b_i и тензоры c_{ij} и d_{ij} равны:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \quad a_2 = 2, \quad b_1 = 3, \quad b_2 = -1 \\ c_{11} &= 3, \quad c_{12} = 1, \quad c_{21} = -2, \quad c_{22} = 6 \\ d_{11} &= 5, \quad d_{12} = 2, \quad d_{21} = 1, \quad d_{22} = 1 \end{aligned}$$

40. Разложить тензор второго ранга c_{ij} на сумму симметричного a_{ij} и антисимметричного b_{ij} тензоров, где c_{ij} равны:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad \text{б) } \begin{pmatrix} 6 & 4 & 7 \\ 2 & 7 & -8 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

41. Для симметричного тензора a_{ij} на плоскости: найти собственные значения и собственные векторы, проверить ортогональность собственных векторов, найти орты системы координат, связанной с главными осями, записать матрицу поворота к главным осям, записать вид тензора в главных осях.

Произвести вычисления для тензоров с компонентами:

- а) $a_{11} = 9, \quad a_{12} = -2, \quad a_{21} = -2, \quad a_{22} = 6$
 б) $a_{11} = 3, \quad a_{12} = -9, \quad a_{21} = -9, \quad a_{22} = 3$
 в) $a_{11} = 0, \quad a_{12} = 3, \quad a_{21} = 3, \quad a_{22} = 6$
 г) $a_{11} = 1, \quad a_{12} = 2, \quad a_{21} = 2, \quad a_{22} = 1$

42. Разложить тензор c_{ij} на сумму симметричного a_{ij} и антисимметричного b_{ij} тензоров.

Для симметричного тензора a_{ij} : найти собственные значения и собственные векторы, проверить ортогональность собственных векторов, найти орты системы координат, связанной с главными осями, записать матрицу поворота к главным осям, записать вид тензора в главных осях, классифицировать тензор (шаровой, симметрический, асимметрический, положительно, отрицательно определенный или знаконеопределенный).

Произвести вычисления для тензоров c_{ij} с компонентами:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{pmatrix} 9 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -4 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix} & \text{б) } & \begin{pmatrix} 3 & 9 & -5 \\ -9 & 3 & 4 \\ 5 & -4 & 3 \end{pmatrix} \\ \text{в) } & \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 \\ 3 & 1 & -3 \\ -6 & 3 & -2 \end{pmatrix} & \text{г) } & \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ -6 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

43. Вычислить свертки, где e_{ijk} - символ Леви-Чивита.

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| а) e_{ijj} | б) $e_{ijk}e_{klm}$ |
| в) $e_{ijj}e_{ikm}$ | г) $e_{ijk}e_{kjm}$ |
| д) $e_{ijk}e_{ijm}$ | е) $e_{ijk}e_{imj}$ |
| ж) $e_{ijk}e_{klm}e_{mnq}$ | з) $e_{ijk}e_{klm}e_{lin}$ |

44. Получить формулу преобразования двойного векторного произведения $\left[\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right]$, используя символ Леви-Чивита.

45. Преобразовать выражения, используя символ Леви-Чивита.

- | | |
|--|--|
| а) $\left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \left[\vec{c}, \vec{d}\right]\right)$ | б) $\left[\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \left[\vec{c}, \vec{d}\right]\right]$ |
| в) $\text{rot}\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ | г) $\text{rot rot}\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ |
| д) $\text{div}\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ | е) $\text{rot rot } \vec{A}$ |

46. Вычислить, используя символ Леви-Чивита:

- | | |
|---|--|
| а) $\text{rot}\left[\left[\vec{a}, \vec{r}\right], \left[\vec{b}, \vec{r}\right]\right],$ | где \vec{a} и \vec{b} - постоянные векторы. |
| б) $\text{rot}\left[\vec{\omega}, \vec{r}\right],$ | где $\vec{\omega}$ - постоянный вектор. |
| в) $\text{div}\left[\vec{\omega}, \vec{r}\right],$ | где $\vec{\omega}$ - постоянный вектор. |
| г) $\text{rot}\left(f(r)\vec{r}\right)$ | |
| д) $\text{rot}\left(\vec{\omega} f(\vec{k} \vec{r})\right),$ | где $\vec{\omega}$ и \vec{k} - постоянные векторы. |

47. Найти матрицу преобразования системы координат, включающую вначале поворот на 90° вокруг оси Oz, а затем инверсию.

48. Даны: a_i - истинный вектор и b_i - псевдовектор. Что представляет собой их векторное произведение?

49. Даны: a_i , b_i и c_i - истинные векторы. Что представляет собой их смешанное произведение $\left(\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right)$?

50. Даны: a_i и b_i - истинные векторы, e_{ijk} - псевдотензор Леви-Чивита. Что представляет собой многокомпонентная величина $e_{ijk}a_jb_k$? Почему? Какие операции производятся при получении этой величины?

51. Даны: a_i - псевдовектор, e_{ijk} - псевдотензор Леви-Чивита. Что представляет собой многокомпонентная величина $e_{ijk}a_k$? Почему?

52. Даны: a_i - истинный вектор, b_i - псевдовектор. Что представляет собой величина a_kb_k ? Почему?

53. Симметричный тензор $\frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]$ бывает удобно представить в виде суммы

шарового тензора и симметричного тензора, имеющего нулевой след (тензора девиации):

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] = \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] - \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right\} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = D_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \operatorname{div} \vec{u}$$

Доказать, что $D_{ii} = 0$.

54. Задано векторное поле \vec{u} в двухмерном пространстве: $\vec{u} = (xy, x^2 - y^2)$. Найти компоненты тензора девиации D_{ij} в точках: а) $x=1, y=2$; б) $x=0, y=1$. Найти главные значения и главные направления тензора девиации в этих точках.

55. Для тензорного поля $T_{i_1 i_2 \dots i_N}(x_1, x_2, x_3)$ N-го ранга доказать теорему, которая является обобщением теоремы Остроградского-Гаусса.

$$\int_V \sum_{i_N} \frac{\partial T_{i_1 i_2 \dots i_N}}{\partial x_{i_N}} dV = \int_S \sum_{i_N} T_{i_1 i_2 \dots i_N} dS_{i_N}$$

Указание: Умножим левую и правую части равенства на произвольный постоянный тензор $A_{i_1 i_2 \dots i_{N-1}}$ ранга (N-1) и выполним свертку по индексам $i_1 i_2 \dots i_{N-1}$.

Образцы индивидуальных заданий

Темы 4,5,6

Тензорный анализ

1. Найти координаты вектора x в базисе $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$, если он задан в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$.

$$x = (6, -1, 3)^T, \quad \begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + 2e_3, \\ e'_2 = 2e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

2. Найти матрицу линейного оператора в базисе $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$, где

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 - e_2 + e_3, \\ e'_2 = -e_1 + e_2 - 2e_3, \\ e'_3 = -e_1 + 2e_2 + e_3, \end{cases}$$

если она задана в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Даны тензоры c^i_{jk} , d^{ij} , ξ^i , η_i . Величины g , h определены в каждом базисе формулами $g = c^i_{jk} \xi^j \xi^k \eta_i$ и $h = c^i_{jk} d^{jk} \eta_i$ соответственно. Опираясь на закон преобразования компонент данных тензоров, показать, что эти величины являются инвариантами.

4. Тензор A типа $(0,3)$ и тензор B типа $(0,1)$ заданы в некотором базисе линейного пространства V_2 . Найти тип и матрицу тензора $A \otimes B$, если

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right), \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

5. Тензоры $A = (a_k^{ij})$, $\eta = (\eta_i)$ заданы матрицами

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \end{array} \right), \quad \eta = (-1, 3).$$

Найти матрицы свертки: 1) a_i^{ij} , 2) a_j^{ij} ; 3) $a_j^{ij} \eta_i$.

6. Ковариантный метрический тензор g_{ij} и тензор a_{jk}^i заданы соответственно матрицами:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу тензора: 1) a_{ijk} ; 2) $a_{jk}^{i..}$; 3) $a_{jk}^{i..k}$; 4) a^{ijk} .

7. Специальная система координат вытянутого эллипсоида вращения $y^1 = u$, $y^2 = v$, $y^3 = \varphi$ в \mathbb{R}^3 связана с декартовыми координатами x^1 , x^2 , x^3 формулами

$$x^1 = au \sin v \cos \varphi, \quad x^2 = au \sin v \sin \varphi, \quad x^3 = au \cos v.$$

1. Найти локальный базис системы координат.
2. Вычислить евклидову метрику в указанных координатах

Темы 1,2,3,6

Векторный анализ

Вариант № 1

1. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z)$ в точке M по направлению проходящей через эту точку нормали к поверхности S , образующей острый угол с положительным направлением оси Oz .

$$u = 4 \ln(3 + x^2) - 8xyz, \quad S: x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1, \quad M(1, 1, 1).$$

2. Найти поток векторного поля \vec{a} через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя)

$$\vec{a} = (x+z)\vec{i} + (z+y)\vec{k}, \quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = x, z = 0 (z \geq 0) \end{cases}.$$

3. Найти работу силы \vec{F} при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N .

$$\vec{F} = (x^2 - 2y)\vec{i} + (y^2 - 2x)\vec{j}, \quad L: x^2 + y^2 = 4 \quad (y \geq 0), \quad M(2, 0), \quad N(-2, 0).$$

4. Найти модуль циркуляции векторного поля \vec{a} вдоль контура Γ .

$$\vec{a} = (x^2 - y)\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k}, \quad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 1 \end{cases}.$$

5. Найти $\text{grad}(\vec{a}, \vec{r}, \vec{b})$.

Вариант № 2

1. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z)$ в точке M по направлению проходящей через эту точку нормали к поверхности S , образующей острый угол с положительным направлением оси Oz .

$$u = \sqrt{x^2 + y^2} - z, \quad S: x^2 + y^2 = 24z + 1, \quad M(3, 4, 1).$$

2. Найти поток векторного поля \vec{a} через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя)

$$\vec{a} = (z+y)\vec{i} + (x-z)\vec{j} + z\vec{k}, \quad S: \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4, \\ 3x + 4y + z = 12, \quad z=1 \end{cases}.$$

3. Найти работу силы \vec{F} при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N.

$$\vec{F} = (x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}, \quad L: y = x^2, \quad M(-1,1), \quad N(1,1).$$

4. Найти модуль циркуляции векторного поля \vec{a} вдоль контура Γ .

$$\vec{a} = xz\vec{i} - \vec{j} + y\vec{k}, \quad \Gamma: \begin{cases} z = 5(x^2 + y^2) - 1, \\ z = 4 \end{cases}.$$

5. Найти $\text{grad} \ln(1/r)$.

Вопросы к зачету по изучаемой дисциплине

1. Скалярные и векторные физические величины. Вектор и его числовые характеристики. Примеры.
2. Координаты вектора и его числовые характеристики в координатной форме. Примеры.
3. Линейные операции над векторами (сложение, вычитание, умножение на число) и их свойства. Примеры.
4. Множество свободных векторов, равенство векторов, нулевой вектор, углы между векторами, коллинеарные и ортогональные векторы. Примеры.
5. Линейная комбинация векторов, линейно зависимые и независимые векторы. Примеры.
6. Базис в пространстве и на плоскости, разложение вектора по базису. Ортонормированный базис, аффинный базис. Преобразование координат при переходе от одного базиса к другому. Примеры.
7. Скалярное и векторное произведения векторов и их свойства. Примеры.
8. Смешанное произведение трех векторов и его свойства. Двойное векторное произведение трех векторов и формула его вычисления. Примеры.
9. Понятие векторной функции от скалярного и векторного аргумента. Годограф радиуса – вектора точки. Приращение радиуса – вектора при изменении скалярного аргумента. Примеры.
10. Скалярные поля, линии и поверхности уровня скалярного поля. Примеры.
11. Производная по направлению для скалярного поля. Определение и формула для вычисления. Примеры.
12. Градиент скалярного поля. Теоремы о градиенте. Связь градиента с производной по направлению. Примеры.
13. Взаимные векторные базисы. Ковариантные и контравариантные координаты вектора.
14. Связь между ко- и контравариантными компонентами вектора.
15. Метрический тензор. Коэффициенты Ламе.
16. Понятие вектор-функции. Годограф вектор-функции. Производная вектор-функции, правила дифференцирования. Интегрирование вектор-функции.
17. Выражение скалярного произведения через ко- и контравариантные компоненты. Выражение векторного произведения двух векторов в косоугольной системе координат. Углы Эйлера.
18. Понятие тензора. Ранг тензора. Свойство инвариантности.
19. Определение тензора произвольного порядка.
20. Преобразование компонент тензора при повороте плоскости вокруг перпендикулярной оси.
21. Тензор в обобщенных координатах.
22. Криволинейные координаты. Тензоры в криволинейных системах координат.
23. Действия над тензорами.

24. Метрический тензор.
25. Понятие главной оси тензора. Приведение тензора к главным осям. Тензорный эллипсоид.
26. Инварианты тензора. Понятие девиатора. Разложение тензора на девиатор и шаровой тензор.
27. Понятие тензорной функции скалярного аргумента. Действия над тензорными полями.
28. Понятие циркуляции векторного поля.
29. Скалярное поле. Производная по направлению, градиент скалярного поля.
30. Векторное поле. Поток векторного поля.
31. Теорема Остроградского.
32. Вихрь векторного поля.
33. Теорема Стокса.
34. Потенциальное векторное поле, примеры. Необходимое и достаточное условие потенциальности векторного поля.
35. Соленоидальное векторное поле, примеры. Необходимое и достаточное условие соленоидальности векторного поля.
36. Лапласово векторное поле. Потенциал лапласова векторного поля.
37. Теорема о разложении непрерывного векторного поля на потенциальное и соленоидальное.
38. Дифференцирование векторного поля по направлению.
39. Поток тензорного поля.
40. Дивергенция тензорного поля.
41. Дифференцирование тензорного поля по направлению.
42. Символы Кристоффеля 2-го рода.
43. Символы Кристоффеля 1-го рода. Свойства символов Кристоффеля.